JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 2, 394–399 (1969)

Über absolute Summierbarkeit von n-dimensionalen Fourierreihen und Fourierintegralen

WALTER TREBELS

Lehrstuhl A für Mathematik, Technische Hochschule, Aachen, Deutschland

1. EINLEITUNG

Ein klassischer Satz von Bernstein besagt (vgl. Zygmund [*13*], p. 135), daß die der 2π-periodischen Funktion f zugeordnete Fourierreihe absolut konvergiert, falls für ein $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\sup_{|\tau| \leqslant \delta} \sup_{\xi \in E_1} |f(\xi + \tau) - f(\xi)| = O(\delta^{\alpha}).$$

Titchmarsh ([*11*], p. 115) untersucht das Problem, unter welchen Bedingungen das Fourierintegral $f^{\wedge}$ von f (hinsichtlich Reihen vgl. Szász [*9*]) zur q-ten Potenz absolut integrierbar ist: Sei $f \in \mathbf{L}^p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leqslant 2$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi + \tau) - f(\xi)|^p \, d\xi = O(\tau^{\alpha p}) \qquad (0 < \alpha \leqslant 1);$$

dann gehört $f^{\wedge}$ zu $\mathbf{L}^q(-\infty, \infty)$ für $p/(p - 1 + \alpha p) < q \leqslant p/(p-1)$.

Wir wollen im folgenden Abschnitt[1] die Resultate von Bernstein und Titchmarsh auf n Dimensionen, $n \geqslant 2$, übertragen und geben eine elementare und kurze Beweismethode an, die sowohl den Fall der Fourierreihen als auch den der Fourierintegrale umfaßt. Der Beweis beruht im wesentlichen auf der Idee, daß man aus der Lipschitzbedingung an f auf eine Darstellung für die Fouriertransformierte $f^{\wedge}$ schließen kann (vgl. [*12*]).

Zunächst werden nun einige Schreibweisen angegeben. Mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, ... bezeichnen wir die Elemente des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n. Das Skalarprodukt von $x, y \in E_n$ ist definiert durch $x \cdot y = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu$ und $|x|$, der absolute Betrag von x, durch $|x|^2 = x \cdot x$. Die griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots$ seien immer skalare Größen. N sei die Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$, Z_n die Menge aller ganzzahligen Gitterpunkte des E_n und T_n der n-dimensionale Torus $\{x;\ -\pi \leqslant x_\nu < \pi,\ \nu \in N,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n\}$. Im folgenden sei D entweder E_n

---

[1] Die Ergebnisse dieser Arbeit waren Bestandteile des Vortrages: "Charakterisierung von Beziehungen zwischen Fouriertransformierten im E_n", der vom Autor auf dem 7. Österreichischen Mathematikerkongreß am 17. September 1968 in Linz gehalten wurde.

oder T_n. Dann bezeichnen wir die Menge der auf D zur p-ten Potenz absolut integrierbaren Funktionen mit

$$\mathbf{L}^p(D) = \left\{f;\, \|f\|_{\mathbf{L}^p(D)} = \left(\int_D |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty\right\} \qquad (0 < p < \infty).$$

Ist $p = \infty$, so setzen wir

$$\mathbf{L}^\infty(D) = \{f;\, \|f\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} |f(x)| < \infty\};$$

insbesondere benötigen wir noch die Menge $\mathbf{C}(T_n)$ der auf T_n stetigen, periodischen Funktionen, normiert durch $\|f\|_{\mathbf{C}(T_n)} = \sup_{x\in T_n} |f(x)|$.

Im folgenden bedeutet p' (bzw. q') stets den zu p (bzw. q) konjugierten Exponenten: $1/p + 1/p' = 1$. Die ν-te Differenz von f mit Verschiebung h definieren wir durch

$$\Delta_h{}^\nu f(x) = \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \binom{\nu}{\mu} f(x + (\nu-\mu)h) \qquad (\nu, \mu \in N).$$

f genügt dann einer Lipschitzbedingung der Ordnung α (in der $\mathbf{L}^p$-Norm): $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \nu;\, \mathbf{L}^p(D))$, falls $f \in \mathbf{L}^p(D)$ und

$$\sup_{|h|\leqslant\tau} \|\Delta_h{}^\nu f\|_{\mathbf{L}^p(D)} = O(\tau^\alpha) \qquad (\tau \to 0+).$$

Die Fouriertransformation ist erklärt für $f \in \mathbf{L}^p(T_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, durch

$$f^\wedge(k) = (2\pi)^{-n} \int_{T_n} f(x)\, e^{-ik\cdot x}\, dx \qquad (k \in Z_n),$$

für $f \in \mathbf{L}^1(E_n)$ durch

$$f^\wedge(v) = (2\pi)^{-n} \int_{E_n} f(x)\, e^{-iv\cdot x}\, dx \qquad (v \in E_n),$$

und für $f \in \mathbf{L}^p(E_n)$, $1 < p \leqslant 2$, durch den Normgrenzwert für $\rho \to \infty$ von

$$f_\rho{}^\wedge(v) = (2\pi)^{-n} \int_{|x|\leqslant\rho} f(x)\, e^{-iv\cdot x}\, dx \qquad (v \in E_n).$$

2. Sätze von Titchmarsh und Bernstein in n Dimensionen

Der nachfolgende Satz kann als eine Übertragung der oben zitierten Ergebnisse auf n Dimensionen angesehen werden.

Satz 1. *Ist* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \nu;\, \mathbf{L}^p(D))$ *für* $0 < \alpha < \nu$, $\nu \in N$ *und* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *so folgt im Falle*

(a) $D = T_n$, *daß* $\sum_{k\in Z_n} |f^\wedge(k)|^q < \infty$,

(b) $D = E_n$, *daß* $\int_{E_n} |f^\wedge(v)|^q \, dv < \infty$,

falls nur

$$\frac{p}{p-1+(\alpha p/n)} < q \leqslant \frac{p}{p-1}.$$

Beweis. Wir berechnen zunächst mittels einer Orthogonaltransformation (vgl. Bochner–Chandrasekharan [2], p. 70) das folgende Integral $(0 < \beta < \nu)$:

$$\int_{E_n} |h|^{-n-\beta}(e^{iu\cdot h} - 1)^\nu \, dh$$
$$= \int_{E_n} |h|^{-n-\beta}(e^{i|u|h_1} - 1)^\nu \, dh = |u|^\beta C(\beta, \nu, n), \tag{1}$$

mit der Konstanten

$$C(\beta, \nu, n) = \int_{E_n} |h|^{-n-\beta}(e^{ih_1} - 1)^\nu \, dh.$$

Nun betrachten wir für festes $\epsilon > 0$ den Ausdruck

$$\frac{1}{C(\beta, \nu, n)} \int_{|h| \geqslant \epsilon} |h|^{-n-\beta} \Delta_h^\nu f(x) \, dh.$$

Offensichtlich existiert das Integral und bildet für $\epsilon \to 0+$ eine Cauchyfolge; denn mit Hilfe der Voraussetzung ist für alle $0 < \beta < \alpha < \nu$

$$\left\| \frac{1}{C(\beta, \nu, n)} \int_{\epsilon_1 \leqslant |h| \leqslant \epsilon_2} |h|^{-n-\beta} \Delta_h^\nu f \, dh \right\|_{\mathbf{L}^p(D)} = o(1)$$

für $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0+$. Auf Grund der Vollständigkeit des Raumes $\mathbf{L}^p(D)$ existiert ein $g \in \mathbf{L}^p(D)$ mit

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \left\| \frac{1}{C(\beta, \nu, n)} \int_{|h| \geqslant \epsilon} |h|^{-n-\beta} \Delta_h^\nu f \, dh - g \right\|_{\mathbf{L}^p(D)} = 0.$$

Sei nun $D = E_n$; mit Hilfe von (1) ist dann

$$\| |v|^\beta f^\wedge(v) - g^\wedge(v) \|_{\mathbf{L}^{p'}(E_n)}$$
$$\leqslant \liminf_{\epsilon \to 0+} \left\| \left[\frac{1}{C(\beta, \nu, n)} \int_{|h| \geqslant \epsilon} |h|^{-n-\beta} \Delta_h^\nu f \, dh - g \right]^\wedge \right\|_{\mathbf{L}^{p'}(E_n)}$$
$$\leqslant \liminf_{\epsilon \to 0+} \left\| \frac{1}{C(\beta, \nu, n)} \int_{|h| \geqslant \epsilon} |h|^{-n-\beta} \Delta_h^\nu f \, dh - g \right\|_{\mathbf{L}^p(E_n)} = 0, \tag{2}$$

d.h. $|v|^{\beta} f^{\wedge}(v) = g^{\wedge}(v)$ f.ü. Analog zeigt man im Falle $D = T_n$ die Relation $|k|^{\beta} f^{\wedge}(k) = g^{\wedge}(k)$ für alle $k \in Z_n$, $k \neq 0$. Hieraus folgt mit Hilfe der Hölder—Ungleichung für Reihen unmittelbar

$$\sum_{k \in Z_n} |f^{\wedge}(k)|^q = |f^{\wedge}(0)|^q + \sum_{k \in Z_n}' \left| |k|^{-\beta} g^{\wedge}(k) \right|^q$$

$$\leqslant |f^{\wedge}(0)|^q + \left(\sum_{k \in Z_n}' |g^{\wedge}(k)|^{p'} \right)^{q/p'} \left(\sum_{k \in Z_n}' |k|^{-\beta p' q/(p'-q)} \right)^{1-q/p'},$$

wobei wir unter $\sum'$ die Summation über alle $k \in Z_n$ mit Ausnahme von $k = 0$ verstehen. Da wegen der Hausdorff–Young Ungleichung die Summe über $g^{\wedge}(k)$ endlich ist, konvergiert die Reihe $\sum |f^{\wedge}(k)|^q$, falls $-\beta p' q/(p' - q) < -n$ ist, d.h. $p/(p - 1 + (\beta p/n)) < q$. Die Behauptung (a) folgt nun unmittelbar, da letztere Abschätzung für alle β, $0 < \beta < \alpha$, gilt und die obere Schranke $q \leqslant p' = p/(p-1)$ durch die Hausdorff–Young Ungleichung gegeben ist. Im Falle (b) schließt man ganz analog.

Bemerkung 2. In E_1 hat Szász [*10*] für 2π-periodische Funktionen die Lipschitzbedingung im Satze von Titchmarsh folgendermaßen abgeschwächt: Ist $f \in \mathsf{L}^p_{2\pi}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, und $q > 0$, dann folgt aus ($\eta \in N$)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\nu^{-1/p'} \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant \pi/2\nu} \|\Delta_\tau{}^\eta f\|_{L^p_{2\pi}} \right]^q < \infty,$$

daß die f zugeordnete Fourierreihe zur q-ten Potenz summierbar ist, d.h. $\sum_{\nu \in Z_1} |f^{\wedge}(\nu)|^q < \infty$.

Im Falle $f \in \mathsf{L}^2(D)$, $n \geqslant 2$, modifiziert Peetre [7] die Bedingung

$$f \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, \nu; \mathsf{L}^2(D))$$

im Sinne von Szász zu

$$\int_0^\infty \left[\tau^{-\beta} \sup_{|t| \leqslant \tau} \|\Delta_t{}^\eta f\|_{\mathsf{L}^2(D)} \right]^r d\tau/\tau < \infty \qquad \left(\eta \in N, \beta = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\right) \right). \tag{3}$$

Unter der Voraussetzung (3) mit der Einschränkung $0 \leqslant \beta \leqslant n/2$ wird dann bewiesen, daß f Fouriertransformierte einer Funktion $g \in \mathsf{L}^q(D)$ für alle q mit $2/(2 - 1 + (2\beta/n)) \leqslant q \leqslant 2$ ist. Da $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \nu; \mathsf{L}^2(D))$ für $\alpha > \beta$ eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz von (3) ist, umfaßt das Ergebnis von Peetre für $p = 2$ unseren Satz 1.

Hierüber hinaus kann Peetre [7] die Bedingung $f \in \mathsf{L}^2$ noch folgendermaßen abschwächen. Sei f lokal absolut integrierbar und gestatte die Darstellung $f = f_0 + f_1$, wobei $f_0 \in \mathsf{L}^2(D)$ und die (distributionentheoretischen) partiellen Ableitungen der Ordnung $\eta, \eta > \beta$, von f_1 zu $\mathsf{L}^2(D)$ gehören. Dann ist (3) hinreichend für die Existenz von $g \in \mathsf{L}^r(D)$, $1 \leqslant r \leqslant 2$, mit $f = g^{\wedge}$. Da im Beweis jedoch der Satz von Plancherel benutzt wird, scheint der Beweisgang auf den Hilbertraum $\mathsf{L}^2(D)$ beschränkt zu sein. In Satz 1 haben wir hingegen alle Räume $\mathsf{L}^p(D)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, und $\beta > 0$ beliebig zugelassen.

Aus Satz 1 ersehen wir, daß in Falle $p/(p-1+(\alpha p/n))<1$ absolute Konvergenz vorliegt.

FOLGERUNG 3. *Ist* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha,\nu;\ \mathbf{L}^p(D))$, *mit* $(n/p)<\alpha<\nu$ *und* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *so folgt im Falle*

(a) $D=T_n$, *daß* $\sum_{k\in Z_n} |f^\wedge(k)|<\infty$,

(b) $D=E_n$, *daß* $\int_{E_n} |f^\wedge(v)|\,dv<\infty$.

Beachten wir, daß

$$\|f\|_{\mathbf{L}^2(T_n)} \leqslant (2\pi)^{n/2}\|f\|_{\mathbf{C}(T_n)},$$

so ergibt sich aus $f \in \mathrm{Lip}(\alpha,\nu;\ C(T_n))$ auch $f \in \mathrm{Lip}(\alpha,\nu;\ \mathbf{L}^2(T_n))$ und mithin die Übertragung des klassischen Resultats von Bernstein auf n Dimensionen.

FOLGERUNG 4 (BERNSTEIN). *Ist f periodisch und* $f \in \mathrm{Lip}(n/2+\epsilon,\nu;\ C(T_n))$ *für ein* $\epsilon>0$, *dann konvergiert die Fourierreihe von f absolut.*

Dieses Ergebnis erhält auch Igari [*5*] unter Benutzung einer stärkeren Definition einer Lipschitzbedingung (dort wird die Existenz partieller Ableitungen vorausgesetzt; vgl. die Definition von $H_p^{(\alpha)}(E_n)$, die weiter unten folgt).

An Satz 1 schließt sich die Frage an, ob weiterhin mit $f^\wedge \in \mathbf{L}^q(E_n)$ auch $f \in \mathbf{L}^{q'}(E_n)$, $1 \leqslant q' \leqslant \infty$, ist, falls $f \in \mathrm{Lip}(\alpha,\nu;\ \mathbf{L}^q(E_n))$. Die Lösung ist für den Hilbertraum $\mathbf{L}^2(E_n)$ bereits in der Aussage von Peetre [7] enthalten (vgl. Bemerkung 2). Z.B. für $f \in \mathbf{L}^p(E_n)$, $1<p\leqslant 2$, können wir das Problem ebenfalls lösen. Ist nämlich zunächst $\alpha>n/p$, so folgt mit Aussage (b) von Folgerung 3, daß dann f stetig ist und im Unendlichen verschwindet; insbesondere gehört dann f zu $\mathbf{L}^r(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant r\leqslant\infty$.

Aus $f \in \mathrm{Lip}(\alpha,\nu;\ \mathbf{L}^p(E_n))$, $\alpha\leqslant n/p$, folgt für jedes $\beta, 0<\beta<\alpha$, auf Grund des Beweises zu Satz 1 die Existenz von g_β, so daß $|v|^\beta f^\wedge(v)=\widehat{g_\beta}(v)$; benutzen wir nun die Definition des gebrochenen Rieszintegrals [*8*]

$$I^\beta g(x)=[H_n(\beta)]^{-1}\int_{E_n}|x-t|^{\beta-n}g(t)\,dt,$$

mit der Konstanten

$$H_n(\beta)=\pi^{n/2}\,2^\beta\,\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{n-\beta}{2}\right)\right]^{-1},$$

so läßt sich mit einer elementaren Methode zeigen (vgl. [*4*]), daß die Beziehung (2) der Darstellung von f als gebrochenes Rieszintegral äquivalent ist: $f(x)=I^\beta g_\beta(x)$ f.ü. Mit dem Satz von Soboleff über gebrochene Integration folgt dann die Lösung. Hierüber hinaus kann man in der $\mathbf{L}^{q'}$-Norm noch eine Lipschitzbedingung für f ableiten, deren Ordnung von α,p,q' abhängt. Jedoch gehen wir hierauf nicht näher ein, da diese Aussagen bereits in einem Ergebnis von Nikolskiĭ [*6*] enthalten sind, dessen Inhalt wir kurz angeben wollen.

Verwendet man den Differentialoperator

$$D^m = \partial^{\Sigma m_\lambda}/(\partial x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{m_n}) \qquad (m = (m_1, \ldots, m_n), m_\lambda \in N),$$

dann definiert man den Raum $H_p^{(\alpha)}(E_n)$, $\alpha = \eta + \gamma$, $\eta \in N$, $0 < \gamma \leqslant 1$, als die Menge der Funktionen, für die $D^m f \in \mathbf{L}^p(E_n)$, $0 \leqslant \sum_{\lambda=1}^n m_\lambda \leqslant \eta$, und für die $D^m f$, $\sum_{\lambda=1}^n m_\lambda = \eta$, zu $\mathrm{Lip}(\gamma, 1; \mathbf{L}^p(E_n))$, falls $0 < \gamma < 1$, bzw. für $\gamma = 1$ zu $\mathrm{Lip}(1, 2; \mathbf{L}^p(E_n))$ gehören.

Ein Ergebnis von Nikolskiĭ (vgl. [*1*], [*6*]) besagt, daß $H_p^{(\alpha)}(E_n)$ stetig in $H_{q'}^{(\beta)}$ eingebettet ist, falls $1 \leqslant p \leqslant q' \leqslant \infty$ und $\beta \equiv \alpha - (n/p) + (n/q') > 0$.

Da nach einem Reduktionssatz der Interpolationstheorie (vgl. z.B. [*3*], p. 259) $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \nu; \mathbf{L}^p(E_n))$, $0 < \alpha < \nu$, äquivalent zu $f \in H_p^{(\alpha)}(E_n)$ ist, ist mit dem Satz von Nikolskiĭ das oben angeschnittene Problem vollständig gelöst.

Anerkennung

Diese Arbeit entstand im Rahmen eines Forschungsvorhabens, das vom Landesamt für Forschung des Landes Nordrhein–Westfalen unterstützt wurde und das von Prof. P. L. Butzer betreut wurde. Der Autor ist den Herren Prof. Butzer und Dr. R. J. Nessel für wertvolle Hinweise sowie für eine kritische Durchsicht dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

Literatur

1. O. V. Besov, Investigation of a family of function spaces in connection with theorems of imbedding and extension. *Am. Math. Soc. Transl.* (2) **40** (1964), 85–126.
2. S. Bochner und K. Chandrasekharan, "Fourier Transforms." Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1949.
3. P. L. Butzer und H. Berens, "Semi-groups of Operators and Approximation." Springer–Verlag, Berlin–New York 1967.
4. P. L. Butzer und W. Trebels, Hilberttransformation, gebrochene Integration und Differentiation. *Forschungsber. Landes Nordrhein–Westfalen* **1889** (1968).
5. S. Igari, Lectures on Fourier series of several variables. Sendai, 1968 (mimeographed notes).
6. S. M. Nikolskiĭ, On imbedding, continuation and approximation theorems for differentiable functions of several variables. *Russian Math. Surveys* **16** (1961), 55–104.
7. J. Peetre, Applications de la théorie des espaces d'interpolation dans l'analyse harmonique. *Ric. Mat.* **15** (1966), 3–36.
8. M. Riesz, L'intégrale de Riemann–Liouville et le problème de Cauchy. *Acta Math.* **81** (1948), 1–223.
9. O. Szász, Über die Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen. *Math. Ann.* **100** (1928), 530–536.
10. O. Szász, Fourier series and mean moduli of continuity. *Trans. Am. Math. Soc.* **42** (1937), 366–395.
11. E. C. Titchmarsh, "Introduction to the Theory of Fourier Integrals," (2nd ed.). Oxford University Press, London and New York, 1948.
12. H, Weyl, Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges Zürich* **62** (1917), 296–302.
13. A. Zygmund, "Trigonometrical Series." Dover publications, New York, 1955.